

Zadanie 3. Rozszerzony algorytm Euklidesa

Algorytm Euklidesa to algorytm wyznaczania największego wspólnego dzielnika (*NWD*) dwóch liczb całkowitych $a > 0$ i $b \geq 0$.

Specyfikacja:

Dane:

liczby całkowite, $a > 0$ i $b \geq 0$,

Wynik:

największy wspólny dzielnik liczb a i b .

Algorytm *NWD*:

- Krok 1. Jeżeli $b = 0$, to *NWD* jest równy a i zakończ wykonywanie algorytmu.
- Krok 2. Oblicz r jako resztę z dzielenia a przez b .
- Krok 3. Zastąp a przez b , natomiast b przez r .
- Krok 4. Przejdź do kroku 1.

W niektórych zastosowaniach informatycznych potrzebujemy wyrazić największy wspólny dzielnik dwóch liczb całkowitych a, b w następujący sposób:

$$NWD(a, b) = a \cdot x + b \cdot y,$$

gdzie x i y są liczbami całkowitymi.

Do wyznaczenia wartości x i y wykorzystywana jest następująca zależność:

dla $r = a \bmod b$ różnego od zera oraz liczb całkowitych x', y' takich, że

$$NWD(b, r) = b \cdot x' + r \cdot y',$$

parę liczb (x, y) można wyrazić wzorami:

$$x = y'$$

$$y = x' - (a \operatorname{div} b) \cdot y'$$

Uwaga:

$a \bmod b$, $a \operatorname{div} b$ oznaczają odpowiednio resztę i iloraz z dzielenia całkowitego a przez b .

Opisana zależność pozwala na rekurencyjne obliczenie pary liczb (x, y) .

Niech *RozszerzonyEuklides*(a, b) będzie rekurencyjną funkcją realizującą ten pomysł.

Działanie funkcji zilustrujemy przykładem.

Przykład dla $a = 231, b = 30$

i – nr wywołania	$NWD(a, b)$		Zagnieżdżanie rekurencji ←	Powrót z rekurencji →	Wynik x	Wynik y
	Wartość a w i -tym wywołaniu	Wartość b w i -tym wywołaniu				
1	231	30	↓	↑	3	-23
2	30	21	↓	↑	-2	3
3	21	9	↓	↑	1	-2
4	9	3	↓	↑	0	1
5	3	0	↓	↑	1	0

Zatem $NWD(231, 30) = 3 \cdot 231 + (-23) \cdot 30$.

Zadanie 3.1. (0-2)

Uzupełnij poniższą tabelę ilustrującą wykonanie funkcji *RozszerzonyEuklides*(a, b) dla danych $a = 188, b = 12$.

i – nr wywołania	Wartość a w i -tym wywołaniu	Wartość b w i -tym wywołaniu	Wynik x	Wynik y
1	188	12		
2				
3				
4		0	1	0

Zadanie 3.2. (0–3)

Uzupełnij poniższą rekurencyjną funkcję obliczania pary liczb (x, y) dla danych liczb a, b .

Specyfikacja:

Dane:

liczby całkowite $a > 0$ i $b \geq 0$

Wynik:

para liczb całkowitych (x, y) , dla których $NWD(a, b) = a \cdot x + b \cdot y$

RozszerzonyEuklides(a, b):

- Krok 1. Jeśli $b = 0$, podaj jako wynik funkcji parę $(1, 0)$ i zakończ jej wykonywanie.
Krok 2. $r \leftarrow a \bmod b$
Krok 3. $(x, y) \leftarrow \text{RozszerzonyEuklides}(\text{_____}, \text{_____})$
Krok 4. Podaj jako wynik parę $(\text{_____}, \text{_____})$.